

Vektorski prostori

1. Dokažite da je skup $\mathbb{R}^n = \{[x_1, x_2, \dots, x_n] : x_i \in \mathbb{R}\}$ s operacijama

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1, y_2, \dots, y_n] := [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]$$

$$\lambda[x_1, x_2, \dots, x_n] := [\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n]$$

vektorski prostor.

2. Jesu li sljedeći skupovi vektorski prostori (uz uobičajene operacije sa matricama):

a) skup svih matrica tipa $m \times n$ nad \mathbb{R} .

b) skup svih matrica oblika $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$

3. Jesu li vektori $x = [6, 2, 3, 4]$, $y = [0, 5, -3, 1]$, $z = [0, 0, 7, -2]$ linearno nezavisni?
4. Odredite parametar $t \in \mathbb{R}$ tako da vektori x, y, z budu linearno nezavisni, ako su $x = [0, 2, 0]$, $y = [-1, 0, t]$, $z = [2, 0, 1]$.
5. Pokažite da vektori $a = [1, 1, 0]$, $b = [0, 1, 1]$, $c = [1, 0, 1]$ čine bazu od \mathbb{R}^3 . Odredite koordinate vektora $x = [3, 4, 5]$ u toj bazi.
6. Pokažite da vektori $e_1 = [1, 2, -1, -2]$, $e_2 = [2, 3, 0, -1]$, $e_3 = [1, 2, 1, 4]$, $e_4 = [1, 3, -1, 0]$ čine bazu od \mathbb{R}^4 . Odredite koordinate vektora $x = [7, 14, -1, 2]$ u toj bazi.
7. Proverite da li skup vektora $S = \{a, b\}$ čini bazu od \mathbb{R}^3 ako su $a = [1, 0, 0]$, $b = [0, -2, 0]$.
8. Proverite da li skup vektora $S = \{a, b, c\}$ čini bazu od \mathbb{R}^2 ako su $a = [-1, 0]$, $b = [0, 2]$, $c = [1, 1]$.
9. Je li skup koji se sastoji od matrica: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ baza za \mathcal{M}_{22} ?
10. Neka je dan skup $V = \{[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_3 = x_5, x_2 - x_4 = 2x_1 - x_3\}$. Dokažite da je V potprostor od \mathbb{R}^5 i nađite mu bazu i dimenziju.